PART3 確率変数の分散と標準偏差

要点① 確率変数の分散と標準偏差

確率変数 X の散らばりの度合いを表す値として

確率変数と　　　　　　　　　　　　の期待値(平均)

を考える。

X の確率分布が右の表で与えられ，その期待値が　で

あるとする。X の各値と m との差の2乗

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$(x_1-m)^2$，$(x_2-m)^2$，……，$(x_n-m)^2$

について，これらの値をとる

確率変数 $(X-m)^2$ の期待値は

$(X-m)^2$	$(x_1-m)^2$	$(x_2-m)^2$	$\cdots$	$(x_n-m)^2$	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$E\left((X-m)^2\right)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

である。これを X の「　　　」といい，　　　で表す。

確率変数の分散

$$V(X)=E\left((X-m)^2\right)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

分散は，確率変数 X の単位が2乗されているから，X の単位と一致させるために，分散の正の平方根　　　　を考える。これを X の「　　　　」といい，　　　で表す。

確率変数の標準偏差

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

確率変数 X の分散や標準偏差は，X の期待値からの散らばりの度合いを表す。分散や標準偏差の値が小さいほど，X の値が期待値の付近に集中し，大きいほど期待値からの散らばりが大きいことを示す。

例 2枚の硬貨を同時に投げる試行において，表の出る枚数を X とするとき，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

X の期待値は

$$= \quad + \quad + \quad = 1$$

X の分散は

$$= \quad + \quad + \quad = \frac{1}{2}$$

X の標準偏差は

$$= \sqrt{V(X)} = \quad = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

要点② 分散の公式

確率変数 X の分散を表す式を変形すると

$$\begin{aligned} V(X) &= (x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n \\ &= \left(x_1{}^2p_1+x_2{}^2p_2+\cdots\cdots+x_n{}^2p_n\right) \\ &\qquad -2m(x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n) \\ &\qquad\qquad +m^2(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n) \\ &= E\left(X^2\right)-2m\cdot m+m^2\cdot 1 \\ &= E\left(X^2\right)-m^2 \end{aligned}$$

よって，次のことが成り立つ。

分散の公式

$$V(X)=E\left(X^2\right)-m^2=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2$$

例 X の確率分布が右の表のようであるとき

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

X の期待値は $E(X)=1$

よって，X の分散は

$$V(X)= \quad -$$

$$= \quad \cdot\frac{1}{4}+ \quad \cdot\frac{2}{4}+ \quad \cdot\frac{1}{4} \quad = \frac{1}{2}$$

3 当たりくじ 2 本を含む 10 本のくじがある。このくじを同時に 5 本引いたときの当たりくじの本数を X とするとき，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

Point Pickup

確率変数の分散と標準偏差

確率変数 X が右の表の確率分布に従うとき，

X の期待値を $E(X)=m$ とすると

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

分散　$V(X)=E\left((X-m)^2\right)$

$=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$

$=E(X^2)-m^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$　……(X^2 の期待値)−(Xの期待値)^2

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$　……($\sqrt{\text{分散}}$)

第 6 講　PART3 確認問題

1　黒石 4 個，白石 2 個の入った袋から，3 個の石を同時に取り出すとき，出る黒石の個数を X とする。X の期待値，分散，標準偏差を求め，答えは，下の①～⑧のうちから選べ。

$E(X)=$ ア ，$V(X)=$ イ ，$\sigma(X)=$ ウ

① 2　② 3　③ 4　④ $\sqrt{2}$

⑤ $\dfrac{2}{5}$　⑥ $\dfrac{4}{5}$　⑦ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　⑧ $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

PART3 確率変数の分散と標準偏差

3 当たりくじ 2 本を含む 10 本のくじがある。このくじを同時に 5 本引いたときの当たりくじの本数を X とするとき，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

[解答]

確率変数 X のとりうる値は 0，1，2

$$P(X=0)=\frac{{}_8\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{56}{252}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{140}{252}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{56}{252}$$

よって，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{56}{252}$	$\frac{140}{252}$	$\frac{56}{252}$	1

X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{56}{252}+1\cdot\frac{140}{252}+2\cdot\frac{56}{252}=1$$

X の分散は

$$V(X)=(0-1)^2\cdot\frac{56}{252}+(1-1)^2\cdot\frac{140}{252}+(2-1)^2\cdot\frac{56}{252}=\frac{112}{252}=\frac{4}{9}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

（分散の別解）

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=0^2\cdot\frac{56}{252}+1^2\cdot\frac{140}{252}+2^2\cdot\frac{56}{252}-1^2=\frac{364}{252}-1=\frac{112}{252}=\frac{4}{9}$$

第 6 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：⑤，ウ：⑦

[解説]

確率変数 X のとりうる値は 1，2，3

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{12}{20}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}$$

よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	計
P	$\frac{4}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{4}{20}$	1

X の期待値は

$$E(X)=1\cdot\frac{4}{20}+2\cdot\frac{12}{20}+3\cdot\frac{4}{20}=2$$ [A]

X の分散は

$$V(X)$$

$$=(1-2)^2\cdot\frac{4}{20}+(2-2)^2\cdot\frac{12}{20}+(3-2)^2\cdot\frac{4}{20}$$ [B]

$$=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$ [B]

（別解）　分散について

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$ [B]

$$=1^2\cdot\frac{4}{20}+2^2\cdot\frac{12}{20}+3^2\cdot\frac{4}{20}-2^2$$

$$=\frac{88}{20}-4=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

[A]　確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき，期待値は

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

[B]　確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき，X の期待値を $E(X)=m$ とすると，分散は

$$V(X)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

または $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

標準偏差は $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1